

3. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

PIENSA Y CALCULA



Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones:

a) $3^x = 9$

b) $3^x = \frac{1}{9}$

c) $3^x = 3$

d) $3^x = 1$

e) $\log_3 x = 0$

f) $\log_3 x = 1$

g) $\log_3 x = 2$

h) $\log_3 x = -2$

Propiedades de las potencias

1. $a^0 = 1$, $a \neq 0$

2. $a^1 = a$

3. $a^n \cdot a^p = a^{n+p}$

4. $a^n : a^p = a^{n-p}$

5. $(a^n)^p = a^{n \cdot p}$

6. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

7. $(a : b)^n = a^n : b^n$

3.1. Ecuaciones exponenciales

Una **ecuación exponencial** es una ecuación en la que la incógnita aparece en el exponente.

Para resolver las ecuaciones exponenciales, éstas se agrupan en tres tipos:

Ambos miembros se pueden poner como potencia de la misma base

Para resolverlas, se ponen ambos miembros como potencias de la misma base y se igualan los exponentes.

Ejemplo

Resuelve la ecuación: $2^{x+3} + 2^x = 72$

$$2^3 \cdot 2^x + 2^x = 72 \quad \leftarrow \text{porque } 2^{x+3} = 2^3 \cdot 2^x$$

$$8 \cdot 2^x + 2^x = 72$$

$$9 \cdot 2^x = 72 \quad \leftarrow \text{se simplifica dividiendo entre 9 ambos miembros}$$

$$2^x = 8$$

$$2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$$

Se reduce a una de 2º grado

Para resolverlas, se hace el cambio de variable $a^x = z$, con lo que queda una ecuación de 2º grado en la variable **z**. Para cada valor de **z**, se hallan los valores de **x** que tengan sentido.

Ejemplo

Resuelve la ecuación: $9^x - 7 \cdot 3^x - 18 = 0$

$$3^{2x} - 7 \cdot 3^x - 18 = 0 \quad \leftarrow \text{porque } 9 = 3^2 \Rightarrow 9^x = (3^2)^x$$

Se hace el cambio de variable $3^x = z \Rightarrow 3^{2x} = z^2$

$$z^2 - 7z - 18 = 0 \Rightarrow z = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 72}}{2} = \frac{7 \pm 11}{2} = \begin{cases} 9 \\ -2 \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio, $3^x = z$, se tiene:

$$3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$$

$3^x = -2$ no tiene solución, porque las potencias de 3 son siempre positivas.

No es de los tipos anteriores y se pueden aplicar logaritmos

Se deja en cada miembro un solo término y se aplican logaritmos.

Ejemplo

Resuelve la ecuación: $5^{x-2} - 3^x = 0$

Se pasa el término negativo al segundo miembro:

$$5^{x-2} = 3^x$$

Se aplican logaritmos decimales a los dos miembros:

$$(x-2)\log 5 = x \log 3$$

$$x \log 5 - 2 \log 5 = x \log 3$$

$$x \log 5 - x \log 3 = 2 \log 5$$

$$x(\log 5 - \log 3) = 2 \log 5$$

$$x = \frac{2 \log 5}{\log 5 - \log 3} = 6,30 \Rightarrow x = 6,30$$

$$\boxed{2} \boxed{\times} \boxed{\log} \boxed{5} \boxed{\div} \boxed{(\log 5 - \log 3)} \boxed{)} \boxed{=} \boxed{6,30}$$

Logaritmos decimales

$$\log 100 = 2$$

$$\log 10 = 1$$

$$\log 1 = 0$$

$$\log 0,1 = -1$$

$$\log 0,01 = -2$$

Propiedades de los logaritmos

$$a) \log(p \cdot q) = \log p + \log q$$

$$b) \log p/q = \log p - \log q$$

$$c) \log p^n = n \cdot \log p$$

$$d) \log \sqrt[n]{p} = \frac{\log p}{n}$$

3.2. Ecuaciones logarítmicas

Una **ecuación logarítmica** es una ecuación en la que la incógnita aparece como argumento de un logaritmo.

Para resolver las ecuaciones logarítmicas, se aplican las propiedades de los logaritmos hasta obtener que cada miembro sea el logaritmo de un valor.

Ejemplo

Resuelve la ecuación logarítmica: $\log(5x+3) - \log x = 1$

$$\log \frac{5x+3}{x} = \log 10 \quad \leftarrow \text{Se ha utilizado que } 1 = \log 10$$

$$\frac{5x+3}{x} = 10$$

$$5x+3 = 10x$$

$$-5x = -3$$

$$5x = 3$$

$$x = 3/5$$

APLICA LA TEORÍA

Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones:

$$33) a) 3^x = 27$$

$$b) 7^{x+1} = 1$$

$$34) a) 5^{x-1} = 25$$

$$b) 2^x = 1/8$$

$$35) a) \log x = 0$$

$$b) \log_2 x = 4$$

$$36) a) \log_x 3 = 1$$

$$b) L x = 1$$

Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$37) 2^{x^2-1} = 8$$

$$38) 2 \cdot 2^x + 4^x = 80$$

$$39) 5^x + 5^{1-x} = 6$$

$$40) 2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 14$$

$$41) 9^x - 6 \cdot 3^{x+1} + 81 = 0$$

$$42) 4^x = 6^{1-x}$$

$$43) 2^4 - 2^{5x} = 0$$

$$44) 5^{x+1} = 3^{1-2x}$$

$$45) \log_x 16 = 2$$

$$46) \log x + \log 80 = 3$$

$$47) \log(22-x) = -1 + \log x$$

$$48) 3 \log x = 2 \log x + \log 3$$